HY Tähtitieteen laitos/kollokvio 25.11 2009

Sundmanin teoreeman alkeellinen "likainen todistus"

eli yritys muotoilla argumentit tavallisen taivaanmekaniikan kurssin tasolle.

Tämä "todistus" perustuu suurimmalta osalta jo kirjallisuudessa olevista asioista, katso viitteet lopussa.

Apulause I. Kolmen kappaleen törmäys on mahdollinen ainoastaan jos $\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = 0$. Tämä "lause" oli jo tiedossa 1888 tai 1889 [1].

I.1. Lagrange-Jacobi funktion [katso esim. 2] ominaisuudet (todistus helppo): $J = \frac{1}{2}\sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i$
Derivoimalla saadaan

$$(1) \qquad \underline{J''} = 2T + V = 2T - U = \underline{T + H} = 2H - V = 2H + U$$

I.2. Sundmanin epäyhtälö: Käytetään Cauchy-Schwartz epäyhtälöä [1,2,4, ehkä 3.skin]

$$(2) \quad L = \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \to L \le \sum_i m_i |\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i| \le \sum_i m_i |\mathbf{r}_i||\mathbf{v}_i| \le \sqrt{m_i |\mathbf{r}_i|^2} \cdot \sqrt{m_i |\mathbf{v}_i|^2} = \sqrt{4JT}$$

eli (3) $L^2 \le 4JT = 4J(J'' - H)$, Sundmanin epäyhtälö.

Olkoon t törmäyshetki, silloin on $\lim_{t \to t} U(t) = +\infty$ ja L-J:sta seuraa että $J''(t) > 0$ jos $t < t$.
Kuitenkin on $J(t) = 0$ ja $J(t) > 0$, siis J on aidosti pienenevä funktio (lähellä t), eli $J' < 0$. Sundmanin epäyhtälöstä seuraa nyt

$$(4) \qquad J'' \ge L^2 / (4J) + H.$$ Kerrotaan tässä, huom. $-J' > 0$.

Saadaan $-J' J'' \ge -L^2 J'/(4J) - HJ'$ tai $-\frac{1}{2}[(J')^2]' \ge -(L^2/4)(\ln J)' - HJ'$. Nyt integroidaan t_1:stä t_2:een

ja saadaan (5) $[L^2/4] \ln[J(t_1)/J(t_2)] \le H[J(t_2) - J(t_1)] + \frac{1}{2}[J'^2(t_1) - J'^2(t_2)]$.

Kuitenkin on $J(t_2) - J(t_1) < J(t_2)$ ja myös $J'^2(t_1) - J'^2(t_2) < J'^2(t_1)$ josta seuraa

(6) $L^2/4 \le (H\, J(t_2) + ½\, J'^2(t_1)) / (\ln[J(t_1)/J(t_2)])$. Kun nyt $t_2 \to t$, menee nimittäjän argumentin

nimittäjä, siis $J(t_2)$, nollaan ja $L = 0$, **eli jos kaikki kolme kappaletta törmäävät yhteen pisteeseen on L = 0**
M.O.T.

Tämä tapaus on joko että kaikki kappaleet ovat tasasivuisen kolmion kärjissä tai suoralla, vanhat Lagrange tapaukset. Tämän tapauksen Borel mitta (en ole varma mutta se on tuskin Lebesgue mitta) on 0.

Apulause II. Miksi voidaan suureet kehittää $(t - t)^{1/3}$? Argumentti tulee todennäköisesti von Zeipel:lta [5,6] joka aikoinaan tutki singulariteetteja jossa ei ole törmäyksiä. Nämä ovat mahdollisia n-kappaleen ongelmassa ainoastaan jos n >4 [6]?

Nyt tutkitaan tapausta kun $L \neq 0$.

Ajatellaan painovoiman etäisyysriippuvuus $V(r) \sim - r^{1-p}$. Silloin on NII: $r'' = -(p-1)\, r^{-p}$. Tässä r on joko koordinaatti x, y, z tai juuri r.

Kerrotaan r′:lla ja integroidaan. Silloin on $½(r')^2 = \quad r^{1-p} + H_0$, kerrotaan tekijällä r^{p-1} ja tarkastellaan tapausta kun r on pieni. Silloin on

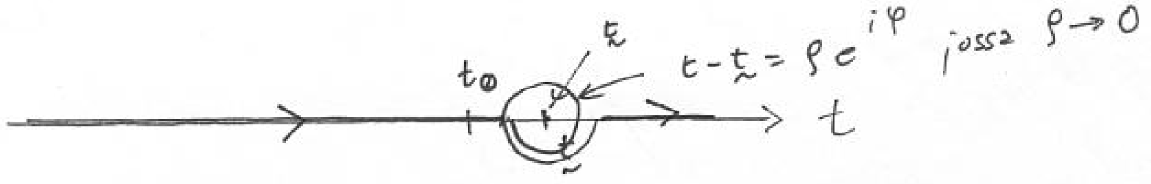
$$(7) \qquad r'\, r^{(p-1)/2} \sim -\sqrt{2} \text{ (huom. } r' < 0 \text{), josta seuraa } (r^{(p+1)/2})' = \text{vakio.}$$

Tästä seuraa integroimalla että $r \sim (t - t)^{2/(p+1)} \sim (u - u)^2$ eli $\boxed{(8)\ u - u \sim (t - t)^{1/(p+1)}}$, p = 2 antaa 1/3.

Sundmanin argumentti ensimmäisen kaavan toisessa osassa on että [3]

$$du = dt/r \text{ ja } r(dr/dt)^2 \sim 2M \to r - r \sim (u - u)^2.$$

Kaava (8) sallii integrointia, potenssi 1/3 vastaa toisen kertalu~~vun~~okan kiertopistettä ja **kaikki relevantit suureet voidaan analyyttisesti jatkaa. M.O.T**



Sundmanin teoreema. Oletan (tässä en ole vielä löytänyt minkäänlaista alkeellista menetelmää paitsi että se mahdollisesti seuraa Cauchyn integroituvuus ehdosta x) tai…[katso esim 8], se vaatii vielä paljon miettimistä) että on olemassa vakio A jolla esimerkiksi H<A ja J<A sekä 1/L<A (tästä viimeisestä olen vähän eri mieltä, mutta olen todennäköisesti väärässä).

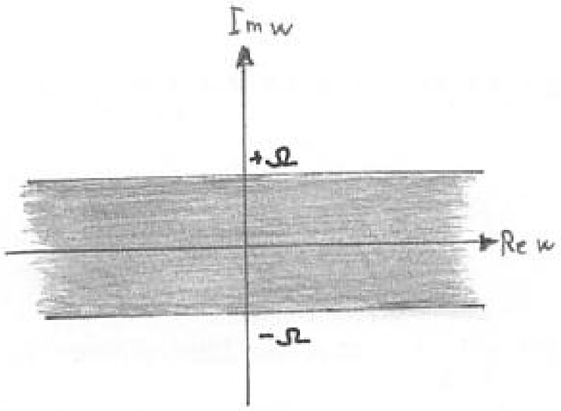
x) Picardin lause

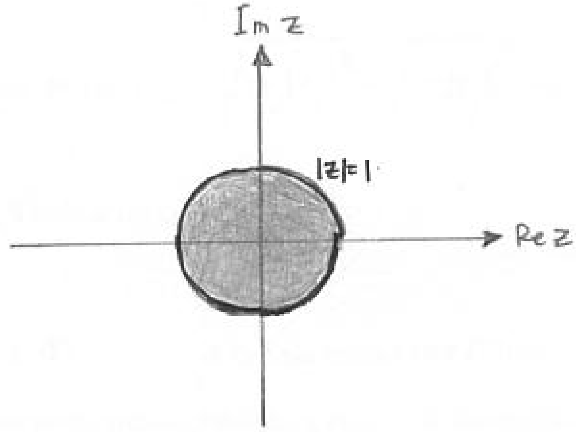
Regularisoinnin muoto on nyt Sundmanin itse keksimä dt = Pdw, jossa

$$P = \prod_{i=1}^{3} (1 - \exp(-r_i/l)).$$

Silloin on olemassa $\Omega = g(A, m)$ jolle kuuluu äärettömän pitkä mutta kapea vyö kompleksitasossa jossa $-\Omega < \mathrm{Im}(w) < \Omega$ ilman singulariteettia. Jos näin on, voidaan suoritta kuvauksen w-tasosta z tasoon muunnoksella [7] z = f(w) tai w = g(z) jossa f(g(z)) = z ja g(f(w)) = w.

$$z = \frac{e^{\frac{\pi}{2}\frac{w}{\Omega}} - 1}{e^{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{w}{\Omega}} + 1} \quad \rightleftarrows \quad w = \frac{2\Omega}{\pi} \ln((1+z)/(1-z))$$





Tässä kuvataan yllämainittua vyötä yksikköympyrän sisälle |z| < 1 ja kaikki sarjat suppenevat, **M.O.T**.

Viitteet:

1. **K. Weierstrass**, kirje 1889 Mittag-Lefflerille
   ja **C. Källman**, esitelmä, Galilei-symposio, 14.11 2009
2. **A. Wintner**, Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton University Press 1941
3. **K. Sundman,** Nouvelles Recherches sur le probleme des Trois Corps, Acta Soc. Scient. Fenn. 35, 1909
4. **S. Volchan**, sähköposti 2009
5. **H. von Zeipel**, Arkiv Mat Astronomi Fysik 4, 1904
6. **D. Saari**, Notices of the AMS, Vol 42, 1995
7. **H. Poincare**, Acta Mathematica, 1890
8. **R. Lehti**, Arkhimedes, No 4, 2000

19.11.2009

cgk info@akkatalo.fi